15/10/2018.

Υπενθ.: Αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $n \geq 1$, τότε $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Η εξίσωση $z^n = 1$ στο $\mathbb{C}$ (δηλ. για $z \in \mathbb{C}$)

Ορισμός: Έστω $n \geq 2$ ακέραιος, θέτουμε $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
Ο ω λέγεται ΑΡΧΙΚΗ n-στη ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ.

Πρόταση: i) $\omega^n = 1$

ii) Οι μιγαδικοί αριθμοί $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n = 1$ είναι διαφορετικοί ανά δύο

iii) Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $z^n = 1$ στο $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n = 1\}$

Απόδειξη

i) Από υπόθ. $\omega^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.

ii) Έστω $1 \le i < j \le n$ και $\omega^i = \omega^j \Rightarrow \omega^i = \omega^{i+(j-i)} \Rightarrow$

$\omega^i = \omega^i \omega^{(j-i)} \Rightarrow \omega^i(\omega^{(j-i)} - 1) = 0 \xRightarrow{\omega \neq 0} \omega^{j-i} = 1$

υπόθ. $\Rightarrow \cos\frac{(j-i)2\pi}{n} + i\sin\frac{(j-i)2\pi}{n} = 1 \Rightarrow$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$

με $2\kappa\pi = \frac{(j-i)2\pi}{n} \Rightarrow \frac{j-i}{n} \in \mathbb{Z}$, αντίφαση γιατί

$0 < \frac{j-i}{n} < 1$

iii) Φανερά $(\omega^i)^n = \omega^{in} = (\omega^n)^i = 1^i = 1$ Άρα

κάθε ω^i είναι ρίζα της εξίσωσης $z^n = 1$.

Αντίστροφα, έστω $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ρίζα της $z^n = 1$ (*)

(*) $\Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

Άρα $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$\Rightarrow$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $n\theta - 2\pi = 2\kappa\pi \Rightarrow n\theta = (\kappa+1)\pi \Rightarrow$

$\theta = \frac{2(\kappa+1)}{n}\pi \Rightarrow z = \omega^i$ για κάποιο i με $1 \le i \le n$.

Φυλ.2 / Άσκηση 11.

Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο.

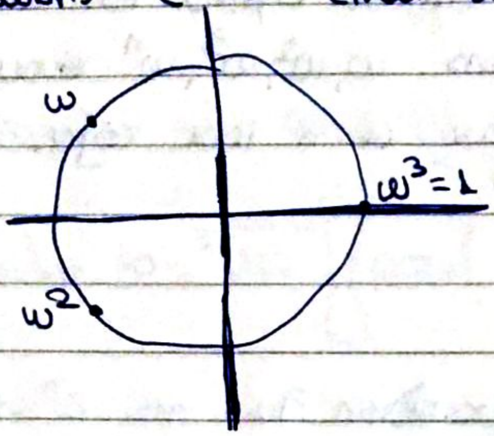
i) $z^3 = 1$.

ΛΥΣΗ:

$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Τότε $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επίσης $\omega^3=1$ από την πρόταση, το σύνολο λύσεων στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^3=1$ είναι το εξής $\{\omega, \omega^2, \omega^3\}$



Χωρίζουμε τον μοναδιαίο κύκλο σε 3 ίσα τόξα, με το ένα σημείο να είναι το $(1,0)$. Τα άλλα δύο σημεία είναι αυτά που αντιστοιχούν στο ω και ω^2.

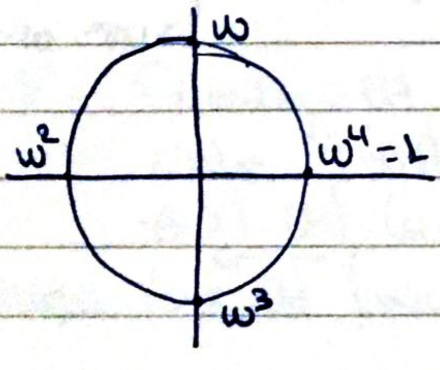
Παρατήρηση: Τα σημεία στο επίπεδο που αντιστοιχούν στα $\omega, \omega^2, \omega^3$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

ii) $z^4=1$.

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $\omega=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i$

Τότε $\omega^2=i^2=-1$, $\omega^3=i^3=(-1)i=-i$,
$\omega^4=1$

Συνεπώς από την πρόταση το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $z^4=1$ στο $\mathbb{C}$ είναι $\{\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}=\{i,-1,-i,1\}$



Επομένως, τα σημεία ~~στα~~ στο επίπεδο που αντιστοιχούν στα $\omega, \omega^2, \omega^3$, $\omega^4=1$ χωρίζουν το μοναδιαίο κύκλο σε 4 ίσα τόξα

Παρατήρηση: Έστω $n \geq 2$, θεωρούμε την εξίσωση $z^n = 1$. Θέτουμε $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Τότε τα σημεία στο επίπεδο που αναπαριστούν τις λύσεις της εξίσωσης $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^n$ είναι στο μοναδιαίο κύκλο και το χωρίζουν σε n ίσα τόξα.

- Η εξίσωση $z^n = \alpha$, για $\alpha \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση: Αν $\alpha = 0$ τότε $z = 0$ μοναδική λύση της $z^n = 0$. Στα επόμενα υποθέτουμε $\alpha \neq 0$.

Βήμα 1ο: Θέτουμε $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ την αρχική n-στη ρίζα της μονάδος.

Βήμα 2ο: Γράφουμε το α στην τριγωνομετρική μορφή

$$\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } \theta \in \mathbb{R}$$

θέτουμε $b = \sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \in \mathbb{C}$.

Πρόταση: Οι λύσεις, στο $\mathbb{C}$, της εξίσωσης $z^n = \alpha$ είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί $b\omega, b\omega^2, b\omega^3, \dots, b\omega^n = b$.
(χωρίς απόδ.)

Φυλλάδιο 2/Άσκηση 12.

Να λυθεί για $z \in \mathbb{C}$ η εξίσωση:

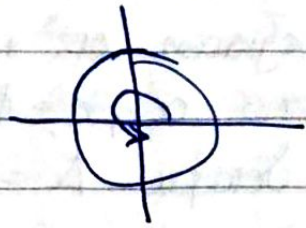
$$z^3 = -i$$

ΛΥΣΗ:

Βήμα 1ο: θέτω $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ η αρχική 3η ρίζα της μονάδος

Βήμα 2ο:

Γράφουμε $-i$ στην τετραγωνική μορφή



Έχουμε: $-i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Θέτουμε $b = \sqrt[3]{|i|}\left[\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}\right)\right)\right] =$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

Από την πρόταση, η εξίσωση $z^3 = -i$ έχει στο $\mathbb{C}$ 3 ρίζες τις εξής: $b\cdot w = i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$bw^2 = i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$bw^3 = b = i$

ii) $z^6 = -64$.

Β-1ο: Θέτω $w = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
η αρχική 6η ρίζα της μονάδος

Β-2ο: Γράφουμε -64 στην τριγωνομετρική μορφή
έχουμε $|-64| = |64| = 64$.
$-64 = |-64|\cdot(\text{συν}\pi + i\cdot\text{ημ}\pi) = 64(\text{συν}\pi + i\cdot\text{ημ}\pi)$

Θέτουμε $b = \sqrt[6]{64}\cdot\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$

Συνεπώς, από την πρόταση, οι ρίζες στο $\mathbb{C}$ της $z^6 = -64$ είναι οι εξής: $wb, w^2b, w^3b, w^4b, w^5b, w^6b = b$.

Η εξίσωση $az^2+bz+c=0$ στο $\mathbb{C}$.
Έστω $a,b,c \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$.
Θέτουμε $\Delta = b^2-4ac \in \mathbb{C}$

Συμβολίζουμε $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ τις δύο μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης
$z^2=\Delta$.

Πρόταση: Οι ρίζες στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $az^2+bz+c=0$ είναι οι εξής:

- $\dfrac{-b+\rho_1}{2a}$
- $\dfrac{-b+\rho_2}{2a}$

Απόδειξη: $az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$z^2+2\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}.$$

- Η γενική εξίσωση στο $\mathbb{C}$.

$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z + a_0 = 0$ με a μιγαδικούς

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)

Έστω $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ με $a_n \neq 0$. Θεωρούμε, στο $\mathbb{C}$, την εξίσωση

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Τότε, η εξίσωση έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. Μάλιστα, αν μετρήσουμε τις ρίζες με πολλαπλότητα, έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση + Δύσκολη απόδειξη.

Παρατήρηση: Αν $n=2$ ξέρουμε κάπως τις λύσεις.

Αν $n=3$ ή 4 υπάρχουν περίπλοκοι τύποι (που ανακαλ. $\simeq$ 1500-1600 μ.Χ.) που δίνουν λύσεις.

Αν $n \geq 5$ οι μαθηματικοί Niels Henrik Abel (1802 - 1829) και Evariste Galois (Γάλλος, 1811-1832) απέδειξαν ότι ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ τύποι με ριζικά που να λύνουν την εξίσωση.